OFFICE DU BACCALAUREAT

Téléfax (221) 825.24.58 - Tél. : 824.95.92 – 824.65.81

Durée : 4 heures

Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

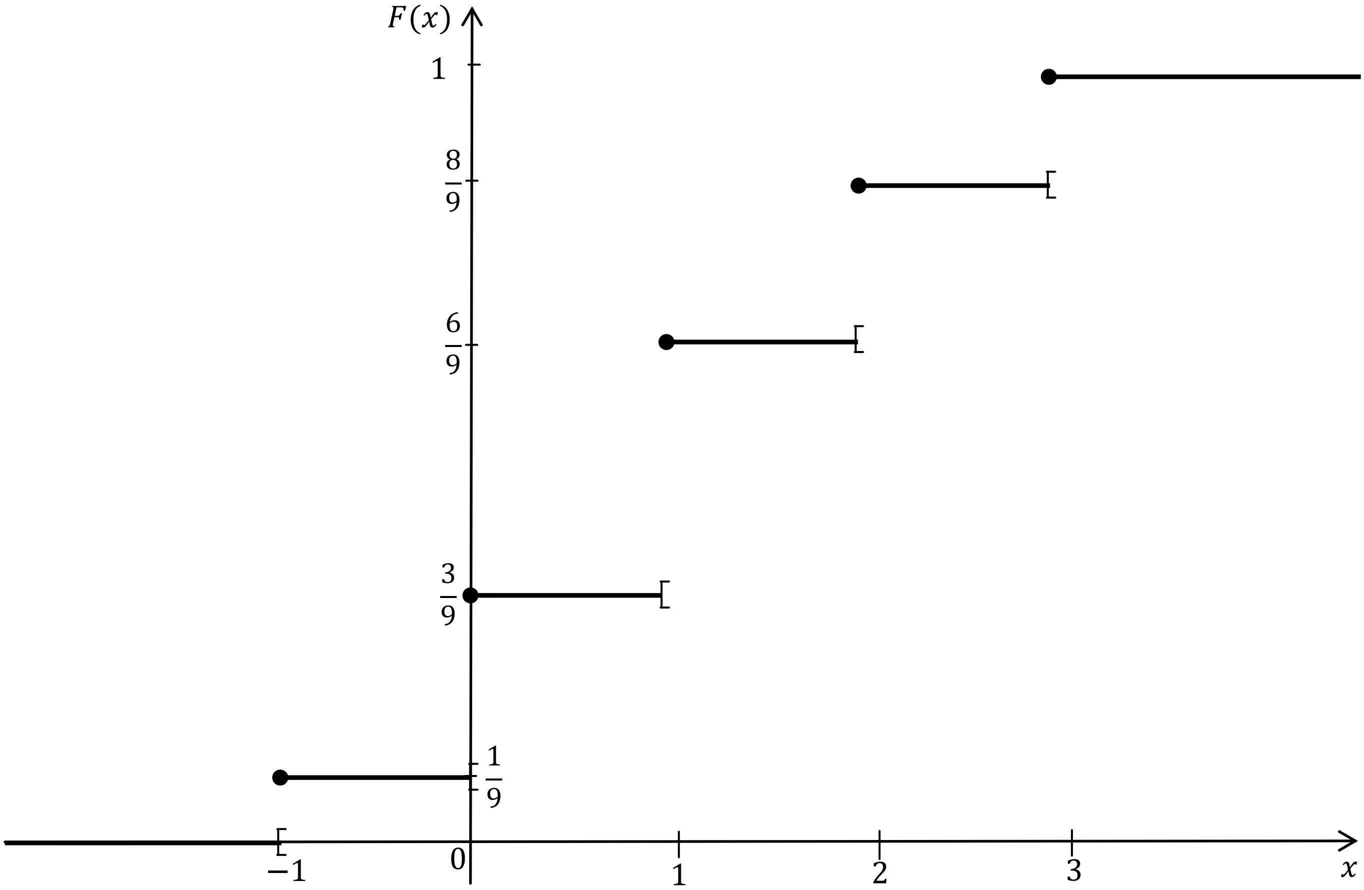
Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (05 points)

1) On considère la fonction de répartition F de la variable aléatoire X,

$\begin{array}{l} F : IR \to [0,1] \\ x \mapsto p(X \le x) \end{array}$, p étant une probabilité définie sur un univers fini et non vide.

Dans un repère orthogonal, la représentation graphique de F est la suivante :



a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$. **(0,5 pt)**

b) Déterminer la loi de probabilité de X. **(1 pt)**

c) Calculer les probabilités $p(X \le 0)$ et $p(X \ge 1)$. **(0,5+0,5 pt)**

d) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X. **(0,5 pt)**

e) Vérifier que l'écart type $\sigma(X)$ de X est égal à $\frac{\sqrt{12}}{3}$. **(0,5 pt)**

2) On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune 3 boules. Les boules de U_1 sont numérotées respectivement $1, 2, 3$ et celles de U_2 portent respectivement les nombres $-2, -1, 0$. On tire au hasard une boule de chaque urne et on effectue la somme Y des numéros des boules tirées.

a) Dresser un tableau à double entrée permettant d'obtenir les valeurs possibles de Y. **(0,75 pt)**

b) En déduire que Y et X ont la même loi de probabilité. **(0,75 pt)**

EXERCICE 2 **(5 points)**

1) Calculer $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)^2$. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les solutions de l'équation $z^2 - i = 0$. **(0,25+0,5 pt)**

2) On pose $P(z) = z^3 + z^2 - iz - i$ où z est un nombre complexe.
a) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle (que l'on déterminera. **(0,25 pt)**
b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes. **(0,5 pt)**

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $2\ cm$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $Z_B = \frac{-\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $Z_C = -1$.
a) Déterminer la forme exponentielle de Z_A et celle de Z_B. **(0,5 pt)**
b) Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe. **(0,75 pt)**

4) Soit D le symétrique du point A par rapport à l'axe réel.
a) Donner l'affixe Z_D du point D sous forme algébrique. **(0,25 pt)**
b) Démontrer que : $\frac{Z_D - Z_C}{Z_A - Z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. En déduire la nature du triangle ACD. **(0,25x2 pt)**

5) Soit E le point d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}i$ et F son symétrique par rapport à O. On considère la similitude directe S qui transforme E en A et F en B.
a) Déterminer l'écriture complexe de S et ses éléments caractéristiques. **(0,25x4 pt)**
b) Soit (C) le cercle de centre E et de rayon **1** . Déterminer l'image (C') de (C) par S. **(0,5 pt)**

PROBLEME **(10 points)**

PARTIE A

1) Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.
Déterminer les solutions h de (E) définies sur $\mathbb{R}$. **(0,5 pt)**

2) On considère l'équation différentielle (F) : $y'' + 4y' + 4y = -4x$.
a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction $\varphi : x \mapsto ax + b$ soit solution de (F). **(0,5 pt)**
b) Montrer qu'une fonction f est solution de (F) si et seulement si $(f - \varphi)$ est solution de (E). **(0,75 pt)**
c) En déduire toutes les solutions de (F). **(0,5 pt)**
d) Donner la solution f de (F) qui vérifie : $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$. **(0,5 pt)**

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[\ \cup\ [0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right), \text{si } x \prec -1 \\ xe^{-2x} + e^{-2x} - x + 1, \ \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

. et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $2\ cm$.

1) a) Calculer les dérivées f' et f'' de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$. **(1 pt)**
b) Etudier les variations de f', puis dresser le tableau de variation de f' sur $[0\,;+\infty[$. **(0,5+0,5 pt)**
c) En déduire le signe de f' sur $[0\,;\,+\infty[$. **(0,5 pt)**

2) Etudier les variations de f sur $]-\infty\,;-1[$. **(0,5 pt)**
3) Dresser le tableau de variation de f. **(0,5 pt)**
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1 \leq \alpha \leq 2$. **(0,5+0,5 pt)**
5) Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (D) que l'on déterminera, puis étudier la position de (D) par rapport à la courbe (C_f). **(0,5+0,5 pt)**
6) Construire les asymptotes, puis la courbe (C_f). **(1,75 pt)**